Generalizaciones

Supongamos que tenemos

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$$

$\Rightarrow$ $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ será la distribución conjunta de nuestro vector aleatorio y

$$f(x_j) = \int\int\int\int f(x_1, x_2, \dots, x_k) \underbrace{dx_1 \dots dx_k}_{k-1}$$

y $dx_i \neq dx_j$

de la misma manera

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = \int\int \dots \int f(x_1, \dots, x_k)\, dx_6\, dx_7 \dots dx_k$$

puedo obtener conjuntas de dimensiones menores simplemente integrando todas las variables que no necesito.

La condicional sería

$$f(x_4, x_5 \mid x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{f(x_1, x_2, x_3)}$$

En muchas ocasiones por conveniencia de notación

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_K) = (\tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

$$f(\tilde{\omega}, \tilde{y}) = \int\int\cdots\int f(\tilde{\omega}, \tilde{y}, \tilde{z})\, d\tilde{z}$$

$$\Rightarrow \qquad f(\tilde{\omega} \mid \tilde{y}) = \frac{f(\tilde{\omega}, \tilde{y})}{f(\tilde{y})}$$

Con $\quad f(\tilde{y}) = \int\int\cdots\int f(\tilde{\omega}, \tilde{y})\, d\tilde{\omega}$

Características de vectores aleatorios

$$\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_K)$$

$$\mathbb{E}(g(\tilde{X})) = \int g(\tilde{x})\, f(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

En el ejemplo de las computadoras Kraemer

$f(x_1,x_2)$

		X_2		
	Variable	2,000	5,000	$f(x_1)$
X_1	3,000	0.3	0.25	0.55
	6,000	0.2	0.10	0.3
	10,000	0.1	0.05	0.15
	$f(x_2)$	0.6	0.4	1

Queremos obtener la ganancia esperada por la venta de cada computadora

$$\Rightarrow \quad g(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} (x_1 + x_2) f(x_1, x_2)$$

$$= 5,000\,(0.3) + 8,000\,(0.25) + 8,000\,(0.2) + 11,000\,(0.1) + 12,000\,(0.1) + 15,000\,(0.05)$$

$$= 1,000\,(5\,(0.3) + 8\,(0.25) + 8\,(0.2) + 11\,(0.1) + 12\,(0.1) + 15\,(0.05))$$

$$= 1,000\,(5\,(0.3) + 8\,(0.45) + 23\,(0.1) + 15\,(0.05)) = 8,150$$

En el caso en el que $g(x_1, x_2) = e^{t_1 x_1 + t_2 x_2}$

$$\Rightarrow M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}\right)$$

es la función generadora de momentos en el caso bivariado

En este caso

$$\left.\begin{aligned} M_{X_1}(t_1) &= M_{X_1, X_2}(t_1, 0) \\ M_{X_2}(t_2) &= M_{X_1, X_2}(0, t_2) \end{aligned}\right\} \text{ las funciones generadoras de momentos de las marginales}$$

Obviamente

$$\underline{\mu_1 = \mathbb{E}(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1}$$

Esperanza condicional

Para $X = (X_1, X_2)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(g(X_1) \mid X_2) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) f(x_1 \mid x_2)\, dx_1 \\ \displaystyle\sum_{x_1} g(x_1) f(x_1 \mid x_2) \end{cases}$$

Covarianza y Correlación

Pensemos en el vector aleatorio bivariado $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ en donde $\mu_1 = \mathbb{E}(\mathbb{X}_1)$ y $\mu_2 = \mathbb{E}(\mathbb{X}_2)$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{12} = \mathbb{E}\left((\mathbb{X}_1 - \mu_1)(\mathbb{X}_2 - \mu_2)\right)$$

es la covarianza entre $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$ y es una medida de asociación entre las variables. Sin embargo una medida que se puede interpretar mejor es

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\mathbb{E}\left((\mathbb{X}_1 - \mu)(\mathbb{X}_2 - \mu)\right)}{\sqrt{Var(\mathbb{X}_1)}\sqrt{Var(\mathbb{X}_2)}}$$

que es el coeficiente de correlación entre $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$ y mide el grado de asociación lineal, i.e.

Si $\rho = 1$ o -1

$$\Rightarrow \quad \mathbb{X}_2 = \alpha + \beta \mathbb{X}_1$$

indicaría que existe una relación lineal perfecta entre las variables. Si $\rho = 1 \Rightarrow \beta > 0$
$\rho = -1 \Rightarrow \beta < 0$

en el polo opuesto se encuentra $\rho = 0$ que indica que X_1 y X_2 no tienen ninguna relación lineal

Cuando $(X_1, X_2) \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma \right)$

i.e. normal bivariada

$$\text{Si} \quad \rho = 0 \Rightarrow X_1 \perp X_2$$

esto pasa únicamente con la distribución normal. Sin embargo, en general $\rho = 0$ sólo implica que NO existe una relación lineal entre las variables. Pero bien podría haber otra clase de relación entre X_1 y X_2

Independencia

Sea $X = (X_1, X_2)$ un vector bivariado (discreto o continuo) $X_1 \perp X_2$ si

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$$

Ejemplo

Sea $X = (X_1, X_2)$ en donde X_1 es el número de águilas en el primer volado y X_2 es el número de águilas en el segundo volado

$$V = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$f(x_1,x_2)$

		X_2		
		0	1	$f(x_1)$
X_1	0	1/4	1/4	1/2
	1	1/4	1/4	1/2
	$f(x_2)$	1/2	1/2	

$\Rightarrow \quad f(x_1,x_2) = f(x_1)\,f(x_2)$ por lo que $X_1 \perp X_2$

Si ahora X_1 = número de águilas en el primer volado
X_2 = número de águilas en los dos volados

$$V = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,2)\}$$

		X_2			
		0	1	2	$f(x_1)$
X_1	0	1/4	1/4	0	1/2
	1	0	1/4	1/4	1/2
	$f(x_2)$	1/4	1/2	1/4	

$$f(0,0) = 1/4 \neq f_{X_1}(0)\,f_{X_2}(0) = 1/8$$
$$(1/2)(1/4)$$

$\Rightarrow X_1 \not\perp X_2$

Teorema

Si $\mathbb{X}_1 \perp \mathbb{X}_2$

$\Rightarrow$ 1) $\mathbb{E}(g(\mathbb{X}_1) h(\mathbb{X}_2)) = \mathbb{E}(g(\mathbb{X}_1)) \mathbb{E}(h(\mathbb{X}_2))$

2) $\sigma_{12} = 0$

3) $\rho = 0$ $\quad$ [$\rho = 0 \Rightarrow \mathbb{X}_1 \perp \mathbb{X}_2$ sólo en el caso normal bivariado]

Dem

Como $\mathbb{X}_1 \perp \mathbb{X}_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2)$

$$\mathbb{E}(g(\mathbb{X}_1) h(\mathbb{X}_2)) = \int\int g(x_1) h(x_2) f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int\int g(x_1) h(x_2) f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \left(\int g(x_1) f(x_1)\, dx_1\right)\left(\int h(x_2) f(x_2)\, dx_2\right)$$

$$= \mathbb{E}(g(\mathbb{X}_1))\, \mathbb{E}(h(\mathbb{X}_2))$$

$$\sigma_{12} = \mathbb{E}((X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2))$$

$$= \mathbb{E}(X_1X_2 - \mu_2 X_1 - \mu_1 X_2 + \mu_1\mu_2)$$

$$= \mathbb{E}(X_1X_2) - \mu_2\mathbb{E}(X_1) - \mu_1\mathbb{E}(X_2) + \mu_1\mu_2$$

$$= \mathbb{E}(X_1X_2) - \mu_1\mu_2$$

Como $X_1 \perp X_2 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$

Cuidado

Podría ser que $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$
pero $X_1 \not\perp X_2$

obteniendo $\rho = 0$ y sin embargo
$X_1 \not\perp X_2$

En general $X_1, X_2, \ldots, X_K$ son v.a. independientes

$$\Longleftrightarrow \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_K) = \prod_{j=1}^{K} f(x_j)$$